Aptus
POTENCIADORA EDUCACIONAL
SIP Red de Colegios | Fundación Reinaldo Solari

¿Cómo hacer clases de matemática para un aprendizaje duradero?

Fundamentos desde las ciencias cognitivas para la didáctica de la matemática.

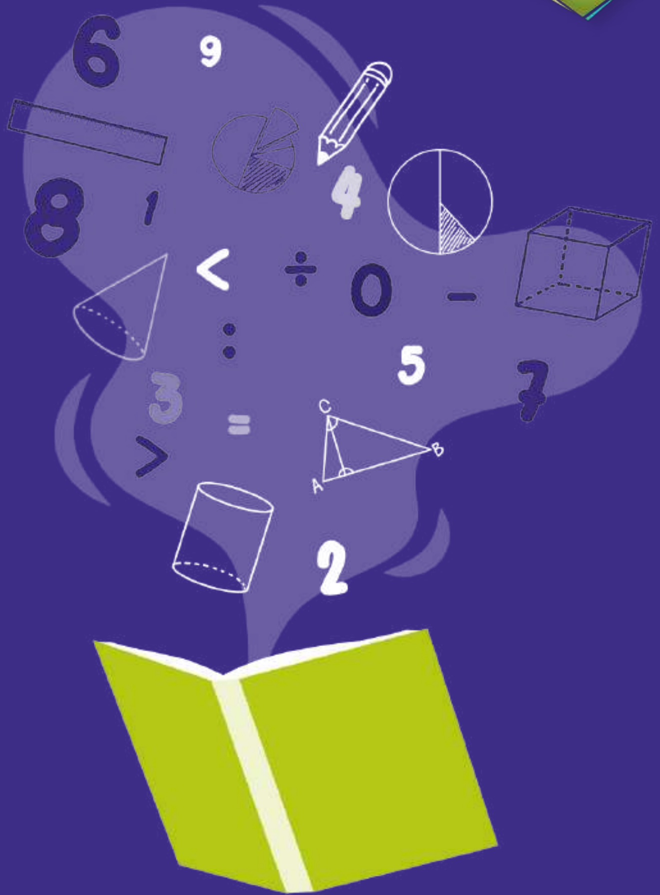
Josefa Álvarez V.
Ricardo Correa T.


Expectativa
Realidad


Z1
CALCULO MENTAL
Changos
Diaguitas
Zona Centro
Mapuches
AGREGAR

Mi experiencia docente me ayudó a tomar mejores decisiones en la sala

4 ideas claves



Temario

- Esquemas mentales
- Carga cognitiva
- Pensamiento efectivo
- Aprendizaje duradero

Esquemas mentales

Modelo simple de la mente

Entorno → Memoria de trabajo ⇄ Memoria a largo plazo

Memoria de trabajo: Lugar del pensamiento consciente y reflexión.

Memoria a largo plazo: Repositorio de todo lo que sabemos y sabemos hacer.

Lugar del pensamiento consciente y reflexión

Memoria de trabajo

Memoria a largo plazo

Repositorio de todo lo que sabemos

Entrada a memoria largo plazo

Limitada en capacidad

Requiere esfuerzo

Se apoya en memoria a largo plazo para pensar

Almacena distintos tipos de memoria

Se organiza en esquemas

Olvida lo que no se codifica

Lugar del pensamiento consciente y reflexión

Memoria de trabajo ⇄ **Memoria a largo plazo**

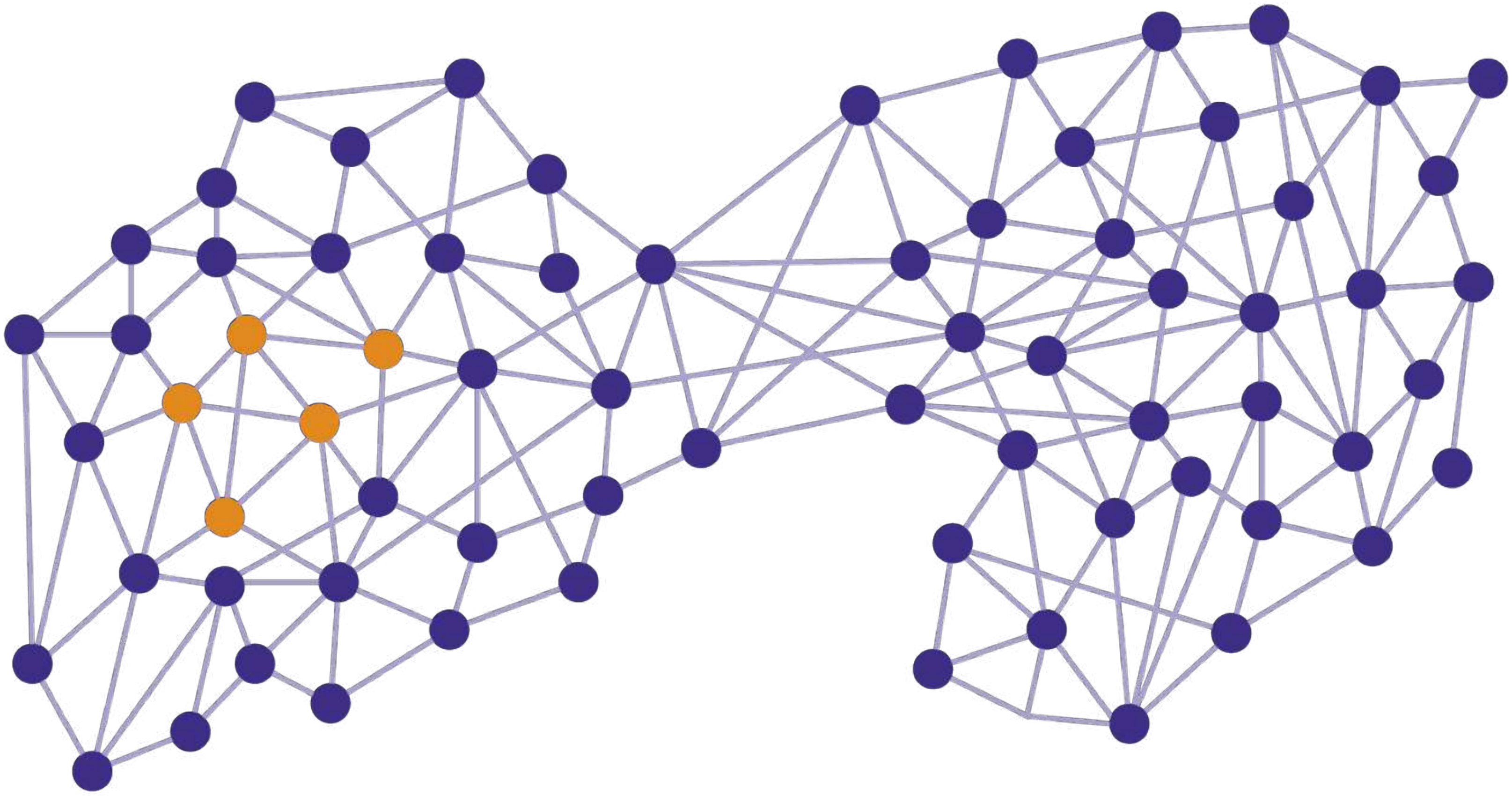
Repositorio de todo lo que sabemos

Memoria de trabajo

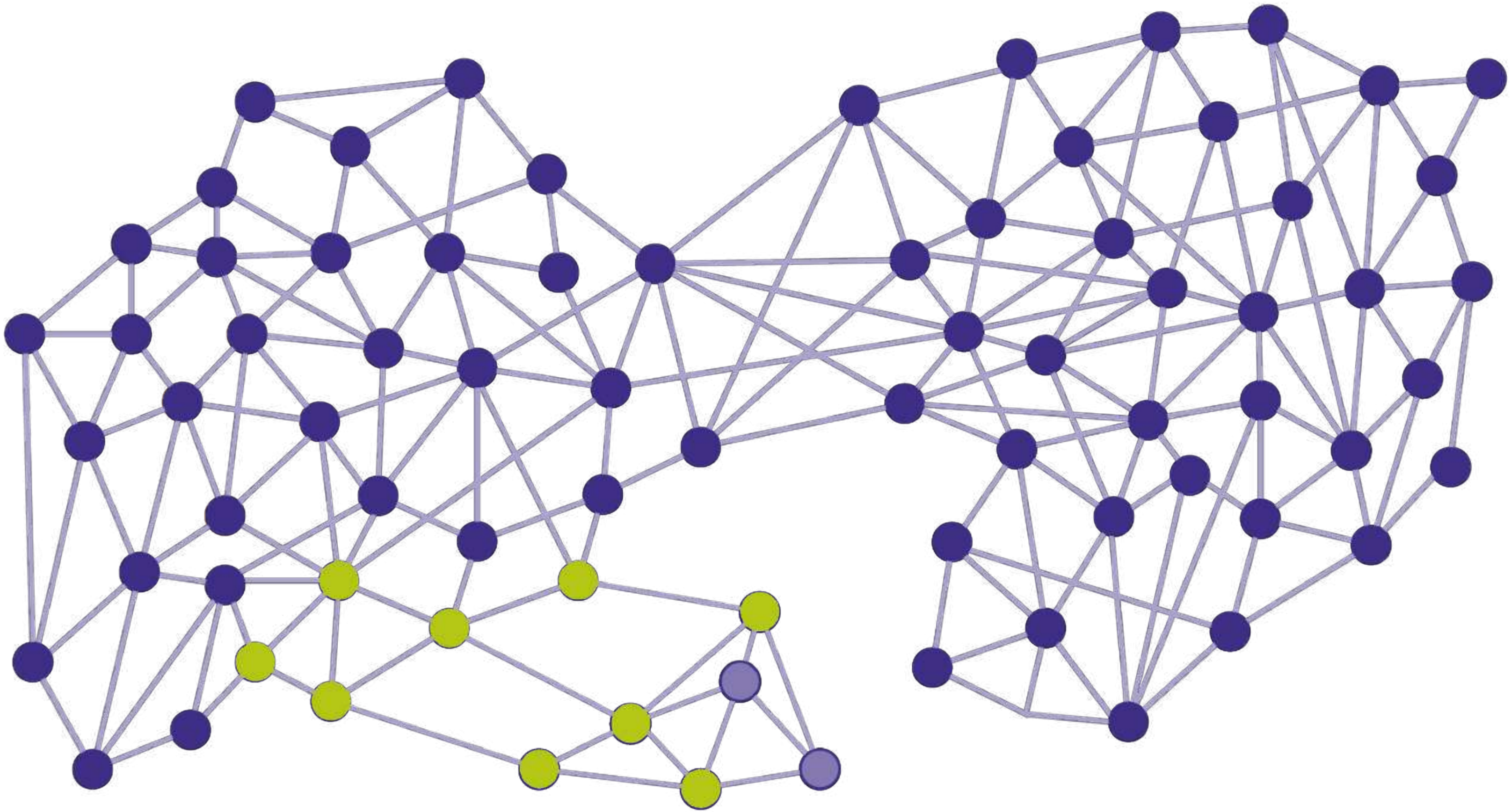
- Entrada a memoria largo plazo
- Limitada en capacidad
- Requiere esfuerzo
- Se apoya en memoria a largo plazo para pensar

Memoria a largo plazo

- Almacena distintos tipos de memoria
- Se organiza en esquemas
- Olvida lo que no se codifica



Fuente: Adaptación en base a presentación de Héctor Ruiz-Martín en researchED Chile 2020



Fuente: Adaptación en base a presentación de Héctor Ruiz-Martín en researchED Chile 2020

Los estudiantes comprenden la información nueva al relacionarla con lo que saben previamente: la información nueva entra en la memoria a largo plazo al conectarse con conocimiento ya existente.

Contenidos críticos

Números y operaciones

Distribución de OA por eje temático

	1° básico		2° básico		3° básico		4° básico	
	Cantidad de OA	%	Cantidad de OA	%	Cantidad de OA	%	Cantidad de OA	%
Números y operaciones	10	50%	11	50%	11	42%	12	44%
Patrones y álgebra	2	10%	2	10%	2	7%	2	7%
Geometría	3	15%	3	15%	5	19%	5	18%
Medición	3	15%	3	15%	4	15%	5	18%
Datos y probabilidades	2	10%	3	10%	4	15%	3	11%
Total de OA	20		22		26		27	

Contenido crítico

Números y operaciones

Eje probabilidades - 7° básico

En una caja hay 3 bolitas blancas, 2 azules y 5 negras. Al sacar una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una azul?

A) 2%

B) 10%

C) 20%

D) 33%

Contenido crítico

Números y operaciones

Todos escriben

Piensa en otro ejemplo donde se utilice el eje de números y operaciones, como base, para resolver un ejercicio o problema de otro eje.

Tiempo: 45 segundos

Contenido crítico

Números y operaciones

Gira y discute

Comparte con tu compañero/a más cercano/a tus respuestas.

Tiempo: 45 segundos

Preparar el aprendizaje

El docente menciona: "Hoy partiremos un nuevo módulo, que viene a complementar los aprendizajes que han adquirido los años anteriores. En este módulo trabajaremos con el conjunto de los números naturales y racionales".
Pregunta:

- ¿Cuáles eran los números naturales?

  R: Los números naturales son los que van desde el 1 hasta el infinito, ejemplo: 1, 2, 3, 4. También podemos decir que son los números positivos.

- Entonces, ¿cuáles son los números racionales?

  R: Las fracciones y los decimales.

a. El sueldo bruto de una persona es de \$900.000. Luego de aplicar los descuentos legales que equivalen al 20% aproximadamente, se obtiene su sueldo líquido. ¿A cuánto equivale su sueldo líquido?

c. El precio de un litro de bencina de 97 octanos era de \$780 y, al cabo de un año, se transformó en \$858. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento de precio?

Ejemplo	¡Hazlo tú!
$2a + 5 - 3b$ $2 \cdot 4 + 5 - 3 \cdot 1$ $8 + 5 - 3 \cdot 1$ $8 + 5 - 3$ $13 - 3$ 10	$3z - 8 + 7t$

$z = 2$

$t = 4$

Organizador de conocimineto:

Números enteros | Positivos (+), Negativos (–) y 0

- Podemos representar los números enteros en la recta numérica.
- Recordemos que la recta numérica es infinita, por lo tanto, los números enteros son infinitos.
- Los números positivos se ubican a la derecha del 0.
- Los números negativos se ubican a la izquierda del 0.
- El 0 es llamado punto de origen.

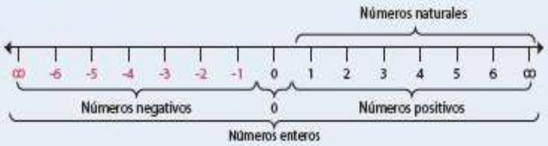
Los números positivos se pueden escribir anteponiendo un signo + o no

+5 o 5

Los números negativos siempre deben estar antecedidos por un signo –

-5

Representación



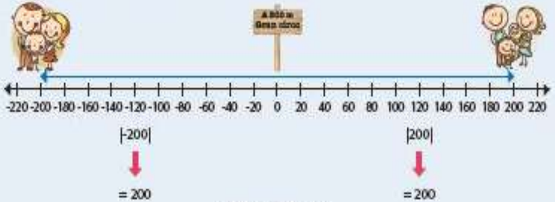
Al **comparar** números enteros utilizamos los signos >, < o =.

Un número positivo siempre será mayor que un número negativo.

Mientras más se avanza hacia la derecha de la recta numérica, el valor de los números enteros aumenta.

Al contrario, si avanzas hacia la izquierda el valor de los números disminuye.

Valor absoluto, lo representamos escribiendo entre dos | |. Este valor representa la distancia entre un número y el 0. Por lo tanto, no considera el signo. El valor absoluto siempre será positivo o 0.



Cuando resolvemos problemas matemáticos usamos la estrategia **MORA**

M Marcar

O Organizar

R Resolver

A Analizar y anotar

Teorema de Tales

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. Los puntos comunes a cada par de lados se denominan vértices del triángulo. Un triángulo rectángulo es un triángulo que presenta un ángulo recto de 90 grados. A los dos lados que forman el ángulo recto se les denomina catetos y al otro lado, hipotenusa.

La **razón** entre dos segmentos es la razón entre las longitudes de ellos, es decir, el cociente de la división entre ellos. Para que dos pares de segmentos se consideren **proporcionales**, las medidas de sus segmentos deben estar en la misma razón.

El **teorema de Tales** establece que si dos o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales (rectas que atraviesan), entonces, las medidas de los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales.

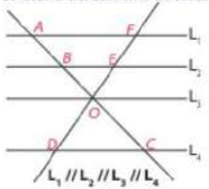
Un corolario es una consecuencia directa de un teorema que no necesita ser demostrada. **El corolario del teorema de Tales** establece que si los lados de un ángulo o sus prolongaciones se cortan con varias rectas paralelas, las medidas de los segmentos que se determinan en los lados del ángulo son proporcionales.

Teorema de Tales

$AB \parallel CD \parallel EF$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF} = \frac{AE}{BF}$$

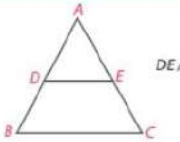
Corolario del teorema de Tales



$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BO}{EO} = \frac{OC}{OD}$$

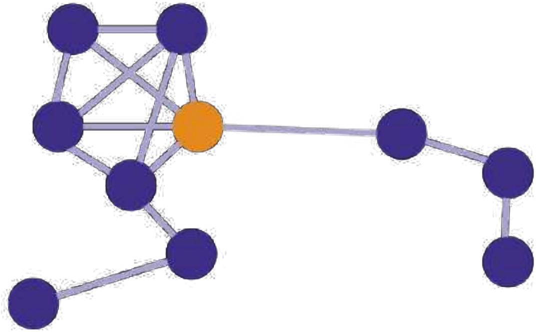
El **teorema particular de Tales** establece que si se traza una recta paralela a un lado de un triángulo, entonces, los segmentos determinados sobre los otros dos lados son proporcionales.



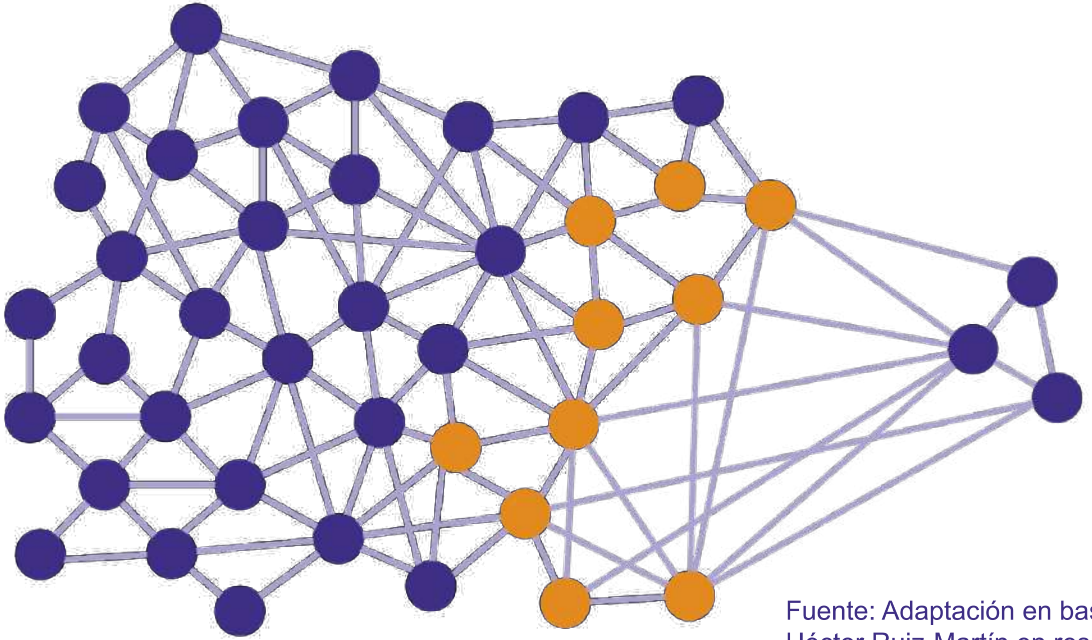
$DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \qquad \frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$$

Principiante



Experto



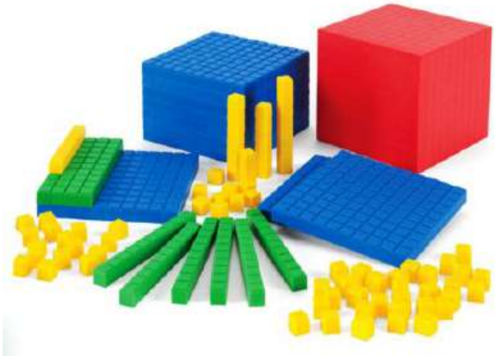
Fuente: Adaptación en base a presentación de Héctor Ruiz-Martín en researchED Chile 2020

Método COPISI

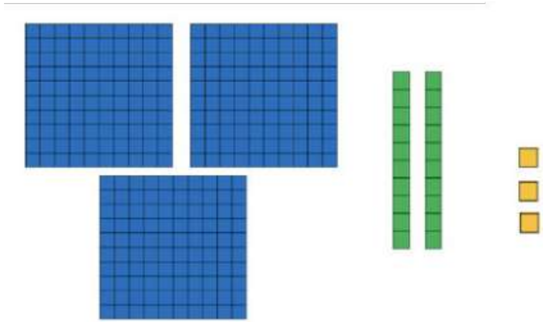
Enseñanza efectiva

COPISI (COncreto - PIctórico - SImbólico)

CONCRETO

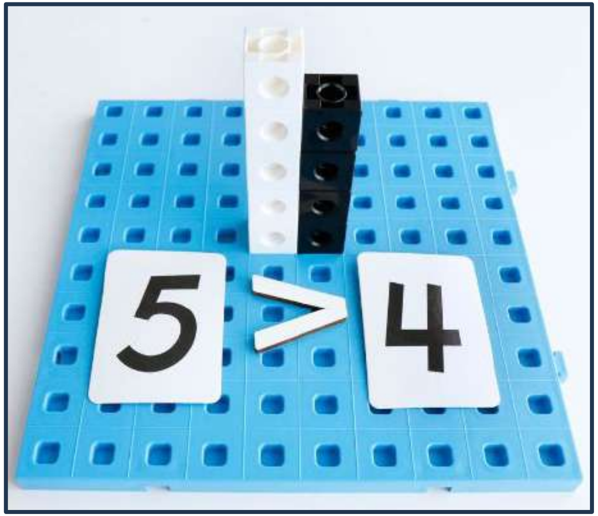
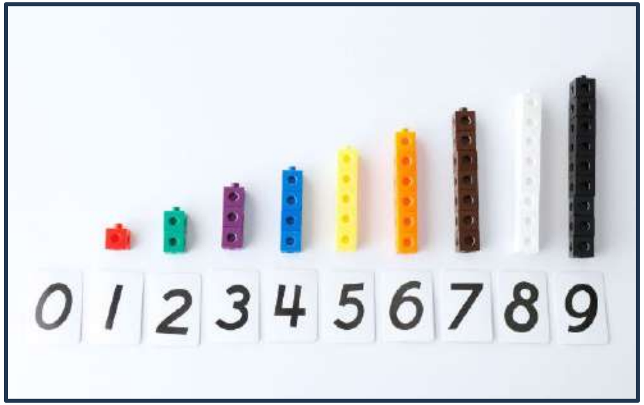
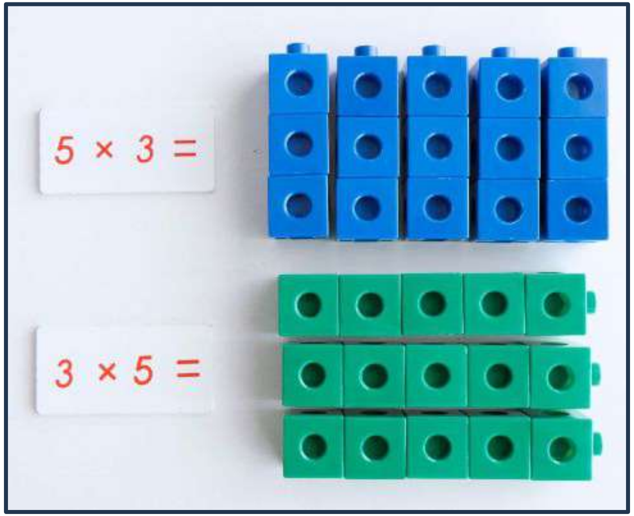
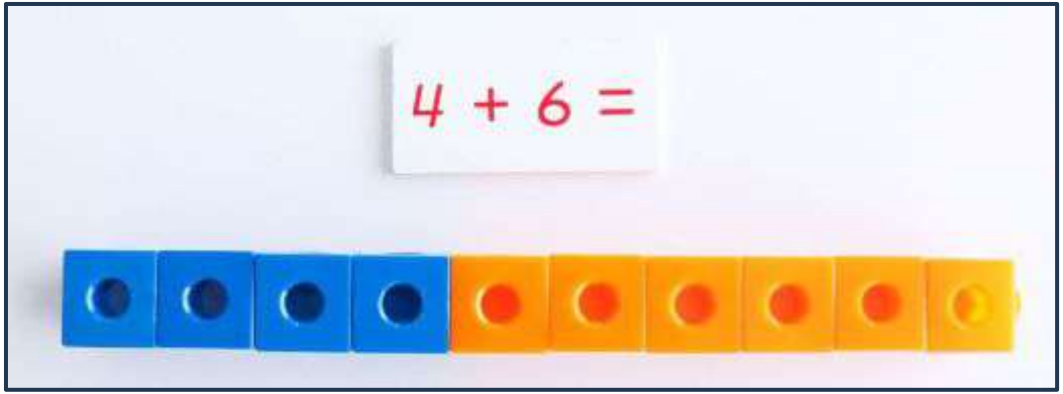
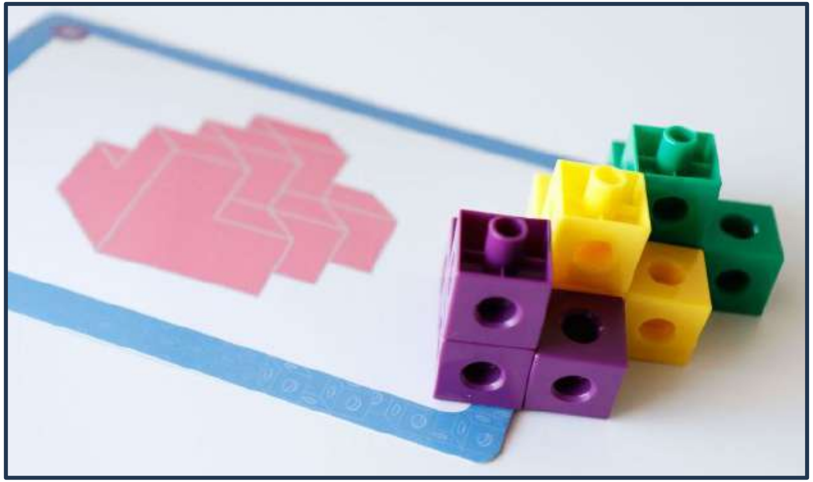


PICTÓRICO

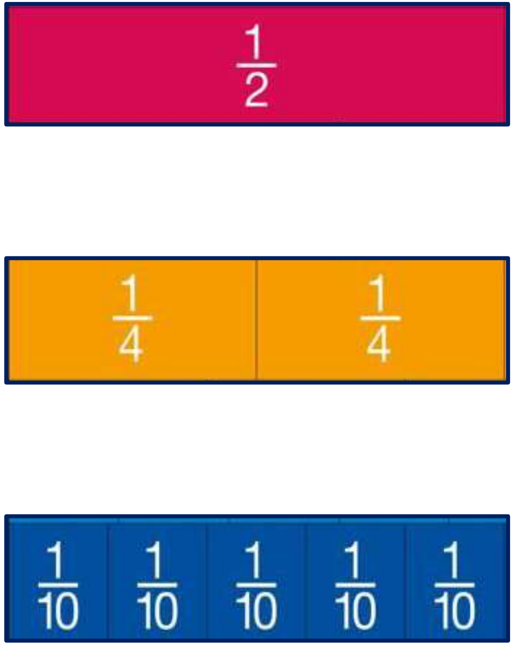


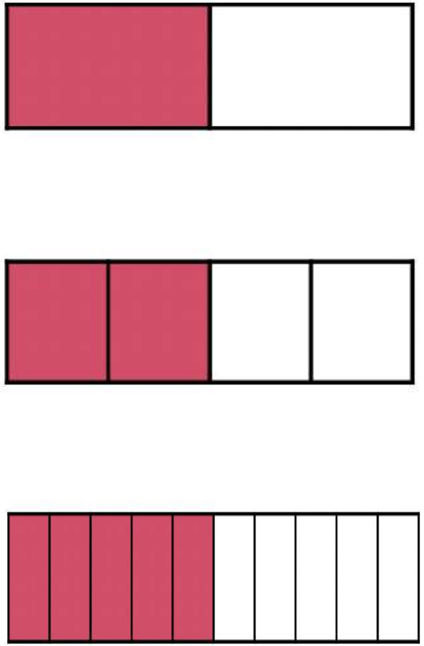
SIMBÓLICO

	C	D	U
		6	12
	6	$\cancel{7}$	$\cancel{2}$
–		2	6
	6	4	6


5 > 4

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

5 × 3 =
3 × 5 =

4 + 6 =


Importancia de llegar a la abstracción





$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}=\frac{5}{10}$$

Los estudiantes que tienen dificultades con las matemáticas pueden beneficiarse significativamente en las clases que incluyen múltiples modelos que abordan un concepto en diferentes niveles cognitivos.

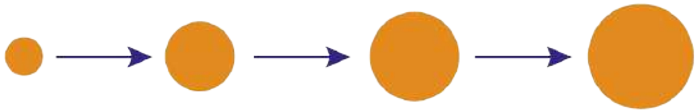
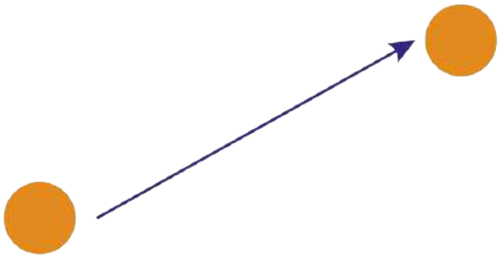
Carga cognitiva

Capacidad memoria de trabajo

7 x 8	56
43 x 5	215
494 x 927	457 938

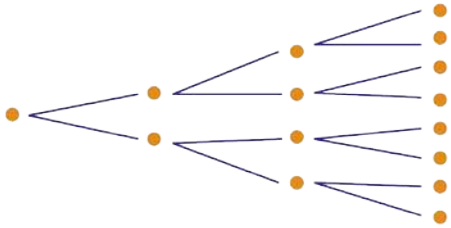
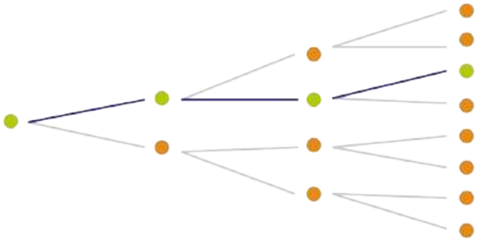
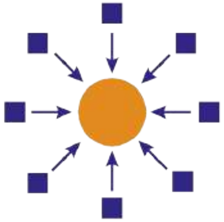
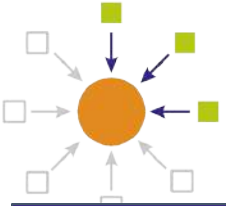
Adquirir y poner en práctica un conocimiento nuevo ayuda a los estudiantes a guardarlo en la memoria a largo plazo: esto reduce la necesidad en los estudiantes de siempre depender de la memoria de trabajo.

Por qué ocurre y cómo se supera la sobrecarga cognitiva

	¿Por qué ocurre la sobrecarga cognitiva?	y cómo superarla
1	La tarea es muy larga 	Descomponerla en entregas más cortas 
2	La tarea es muy difícil 	Particionarla en bloques pequeños 

Adaptación del esquema de @Inner_Drive

Por qué ocurre y cómo se supera la sobrecarga cognitiva

	¿Por qué ocurre la sobrecarga cognitiva?	y cómo superarla
3	**Hay demasiadas opciones** 	**Resaltar una ruta clara** 
4	**Se presenta mucha información a la vez** 	**Priorizar información importante** 

Adaptación del esquema de @Inner_Drive

Recuerda que...

Para multiplicar decimales usando el algoritmo debes seguir los siguientes 3 pasos:

1. Marcar o subrayar los espacios decimales de cada factor.

$$7,\underline{1\ 1} \cdot 9$$

2. Multiplicar normalmente.

$$\begin{array}{l} 7,\underline{1\ 1} \cdot 9 \\ \hline 6\ 3\ 9\ 9 \end{array}$$

3. Poner la coma en el producto, contando de derecha a izquierda los espacios decimales subrayados al comienzo.

$$\begin{array}{l} 7,\underline{1\ 1} \cdot 9 \\ \hline 6\ 3,9\ 9 \end{array}$$

M Marcar encerrando los datos que me sirven para resolver y subrayando la pregunta.
O Organizar los datos.
R Resolver con la operación adecuada que me permite encontrar la solución.
A Analizar la respuesta y escribirla de manera completa.

M: Un repartidor entrega su pizza en 18 minutos si conduce a 50 km/h. ¿En cuánto tiempo entrega la pizza si conduce a 75 km/h?

O:

Demora 18 minutos conduciendo a 50 km/h.

¿Cuánto demora si conduce a 75 km/h?

R:

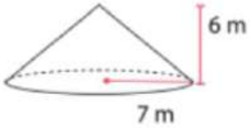
x Velocidad	y Minutos
50	18
: 75	¿?

$$50 \cdot 18 = 900$$
$$900 : 75 = 12$$

A: **El repartidor se demora 12 minutos si conduce a una velocidad de 75 km/h.**

Actividad 1: Calcula el volumen de los siguientes conos.
Completa el desarrollo faltante de cada ejercicio hasta resolverlo.

a.



$r = 7\ m$

$h = 6\ m$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(7)^2(6)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 49 \cdot 6$$

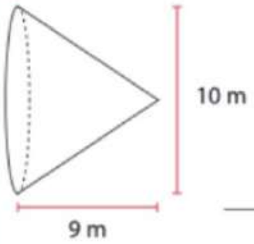
$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 49 \cdot \pi$$

$$V = 2 \cdot 49 \cdot \pi$$

$V =$ ____

El volumen es ________

b.



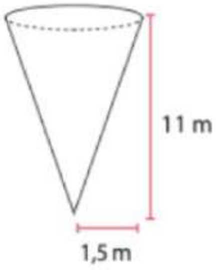
$r = 5\ m$

$h = 9\ m$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(5)^2(9)$$

c.

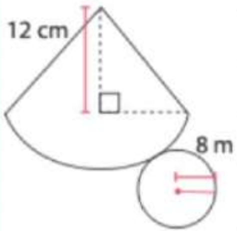


$r = 1{,}5\ m$

$h = 11\ m$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

d.



Pensamiento efectivo

Modelo simple de la mente

Entorno

Memoria de trabajo

Memoria a largo plazo

Lugar del pensamiento consciente y reflexión

Repositorio de todo lo que sabemos y sabemos hacer

Los estudiantes transfieren información a su memoria a largo plazo cuando piensan arduamente sobre su significado. Los profesores deben motivar a los estudiantes a pensar arduamente sobre el significado de lo que se debe aprender.

Lámina 4m

Clase 4

Aptus

¡Pensemos!

1. ¿El valor absoluto de -9 es mayor que el valor absoluto de -6?

2. ¿El valor absoluto de 25 es menor que el valor absoluto de -25?

Actividad 4: Analiza el siguiente ejercicio resuelto, responde las preguntas y aplica lo aprendido en un ejercicio nuevo.

Analiza el siguiente ejercicio	Reflexiona
Calcula el valor de la solución para la ecuación $\frac{x}{3} + 2 = \frac{-4x}{9}$	**1.** ¿Cómo decidió Paula que debía multiplicar en el primer paso la igualdad por 9?
Analiza el desarrollo correcto de Paula	**2.** En el primer paso, ¿pudo Paula haber multiplicado por otro número? ¿Cuál?
$2 + \frac{x}{3} = \frac{-4x}{9}$ / $\cdot 9$ $2 \cdot 9 + \frac{x}{3} \cdot 9 = \frac{-4x}{9} \cdot 9$ $18 + 3x = -4x$ / $+ 4x$ $18 + 3x + 4x = -4x + 4x$ $18 + 7x = 0$ / $- 18$ $18 - 18 + 7x = 0 - 18$ $7x = -18$ / $: 7$ $\frac{7x}{7} = -\frac{18}{7}$ $x = -\frac{18}{7}$	**3.** ¿Cómo cambiaría el paso 1 si el lado derecho de la ecuación hubiese sido $\frac{-4x}{5}$?

Carolina

$$\frac{3}{8}\cdot 2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):\frac{4}{10}$$

$$\frac{6}{8}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):\frac{4}{10}$$

$$\frac{6}{8}+\frac{1}{4}:\frac{4}{10}$$

$$1:\frac{4}{10}$$

$$\frac{10}{4}=2\frac{2}{4}=\mathbf{2\frac{1}{2}}$$

Franco

$$\frac{3}{8}\cdot 2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):\frac{4}{10}$$

$$\frac{3}{8}\cdot 2+\frac{1}{4}:\frac{4}{10}$$

$$\frac{6}{8}+\frac{1}{4}:\frac{4}{10}$$

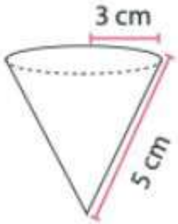
$$\frac{7}{12}:\frac{4}{10}$$

$$\frac{70}{48}=1\frac{22}{48}=\mathbf{1\frac{11}{24}}$$

Actividad 2: Analiza el siguiente ejercicio desarrollado incorrectamente.
Contesta la pregunta de reflexión y resuelve el ejercicio propuesto.

Ejercicio incorrecto de Miguel

Miguel cometió un error en el primer paso del cálculo del volumen de un cono.



$r = 3$ m

$h = 5$ m

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(5)$

X

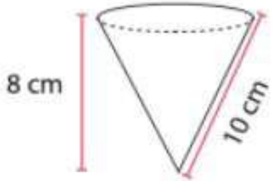
Reflexión

Miguel debió identificar que no estaba el valor de la altura, pero sí de la generatriz, por lo que con el valor de esta última y el radio se puede calcular la altura.

¿De qué forma pudo haber calculado el valor de la altura?

Tu turno

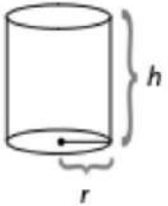
Calcula el volumen del siguiente cono.



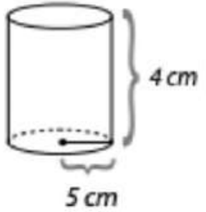
Enseñar un nuevo conocimiento (1/2)

El docente presenta en la pizarra la siguiente secuencia en la modalidad de enseñanza silenciosa:

Procedimiento: Calcular volumen de un cilindro



$V = \pi r^2 h$



$V = \pi r^2 h$

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi (5)^2 (4)$

$V = \pi (25)(4)$

$V = \pi \cdot 100$

$V = 100\pi \text{ cm}^3$

Una vez que finaliza de escribir la secuencia, el docente solicita que realicen un Gira y discute:

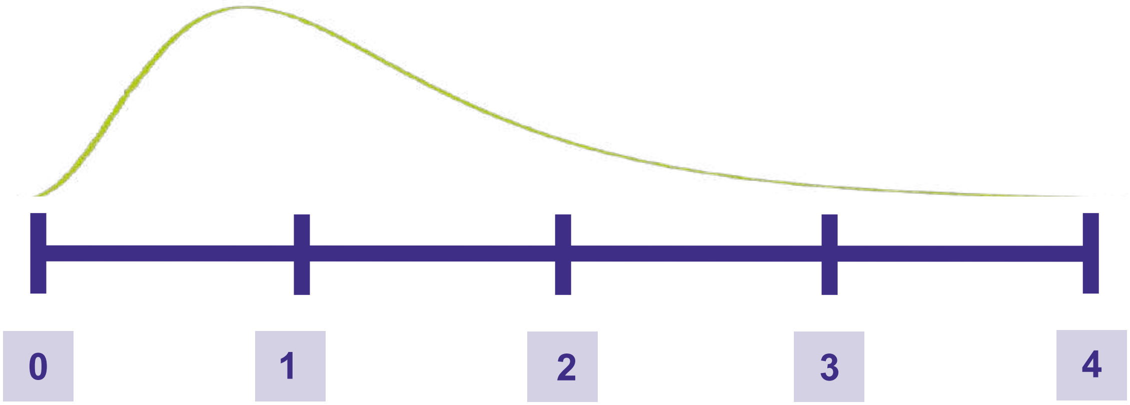
Gira y discute:

- ¿Sería correcta la respuesta si el resultado hubiese sido $\pi 100 \text{ cm}^3$?

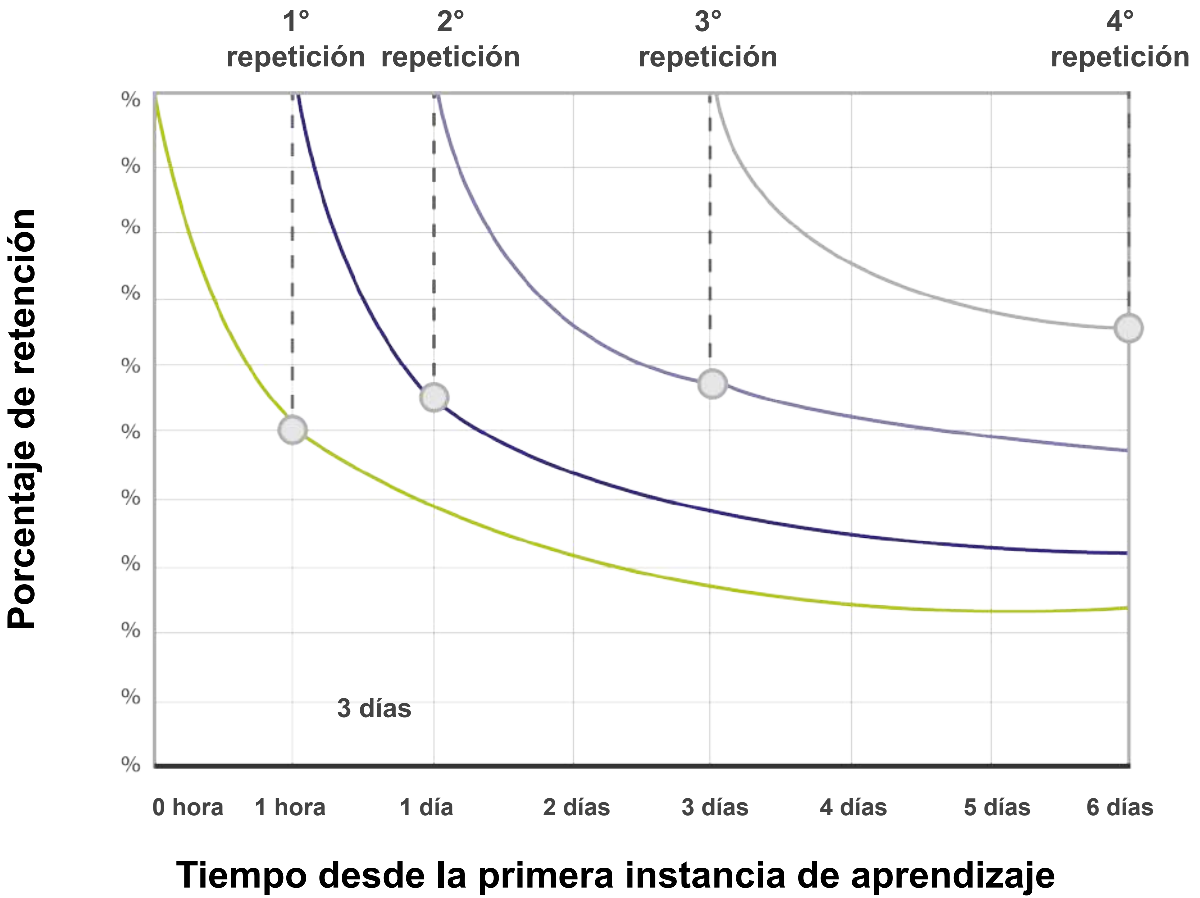
  R: Dado que la propiedad conmutativa de la multiplicación explica que el orden de los factores en una multiplicación no altera el producto (por ejemplo $a \cdot b$ es igual a $b \cdot a$) es que $\pi 100 \text{ cm}^3$ tiene el mismo valor que $100\pi \text{ cm}^3$. Por convención se escribe primero el valor del coeficiente numérico, en este caso el 100.

Aprendizaje duradero

Retención del aprendizaje

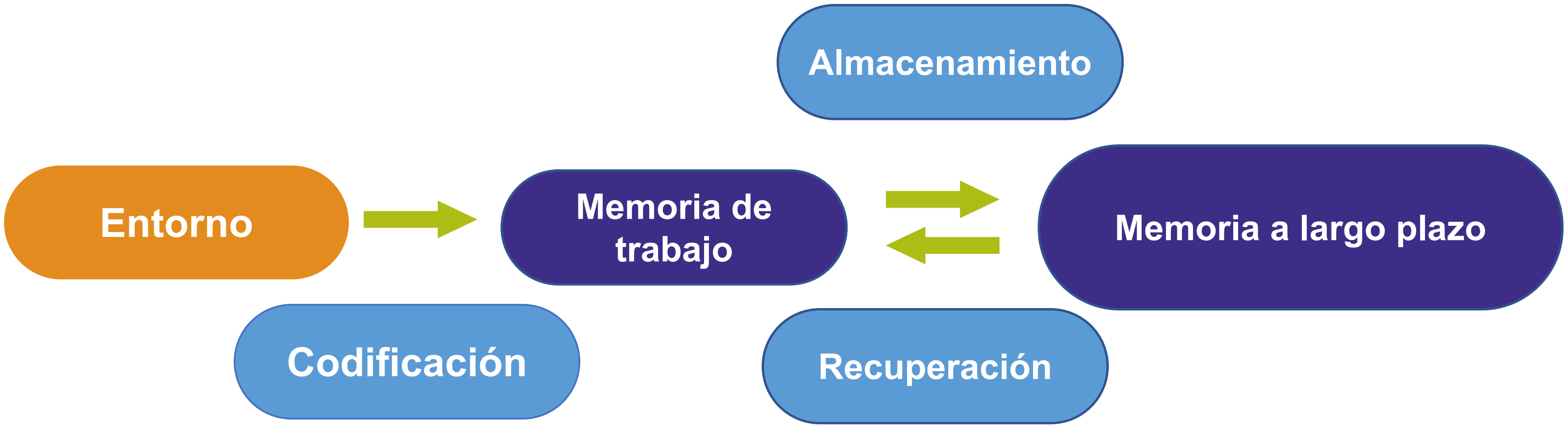


Los profesores pueden hacer más perdurable el conocimiento de los estudiantes, haciéndolos que practiquen, usando y recordando la información en el momento en que el recuerdo de esta comienza a desvanecerse.



Práctica de la evocación (retrieval practice)

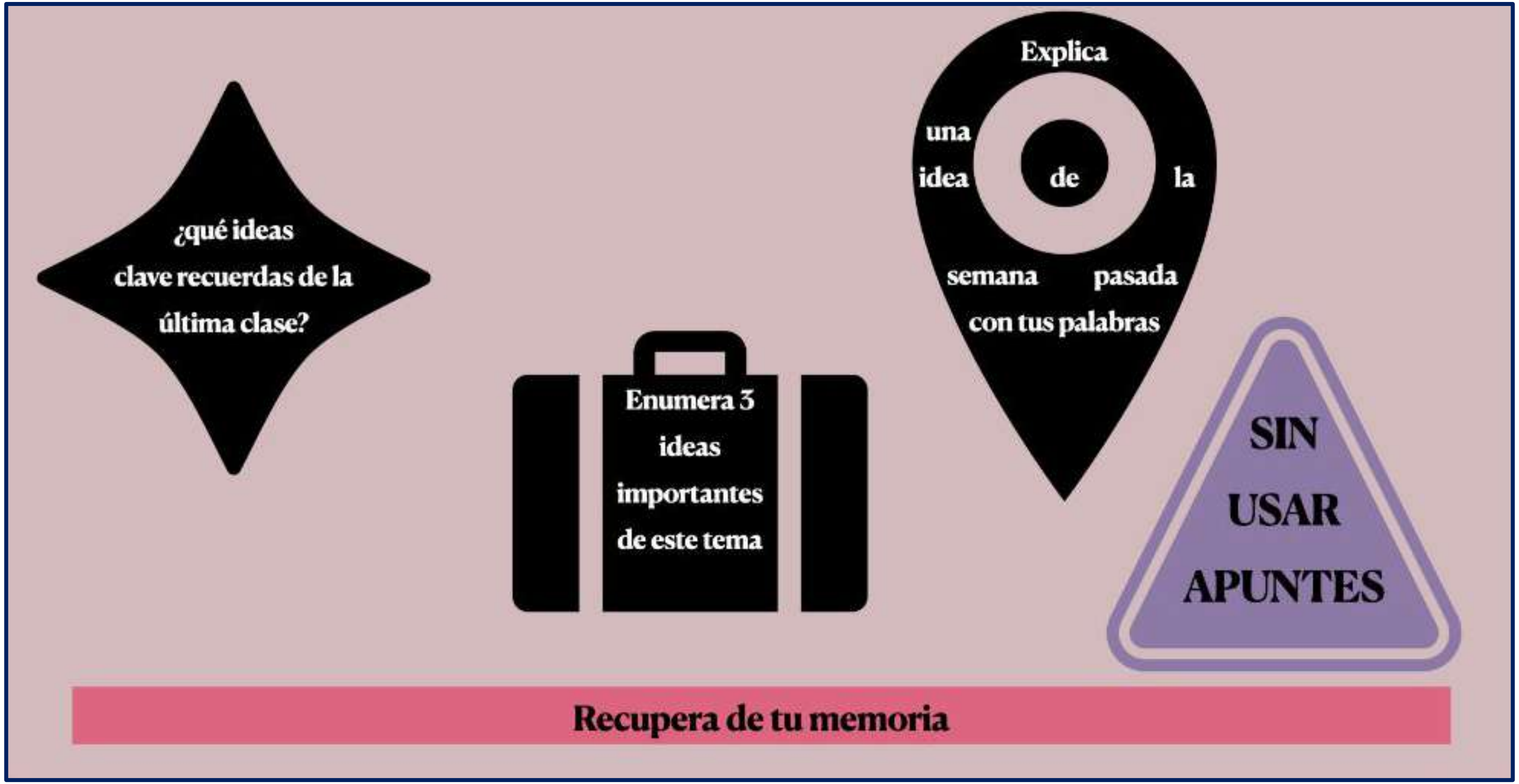
Etapas del aprendizaje



¿Cómo favorecer la codificación?

- Conectar con conocimientos previos
- Dificultades deseables
- Práctica de recuperación
- Práctica Espaciada
- Práctica Intercalada

Práctica de recuperación



Fuente: Blog "Investigación docente"
Juan Fernández

Ticket de evocación

★ TICKET DE SALIDA ★

Nombre:

Completa cada espacio con la respuesta correspondiente.

¿Qué aprendiste hoy sobre la multiplicación?	¿Qué aprendiste ayer sobre cómo se representa una multiplicación?
¿Qué aprendiste la semana sobre la suma iterada?	**¿Qué aprendiste el mes pasado sobre las figuras 2D?**

Vaciado cerebral

Vaciado Cerebral	
Escribe todo lo que sabes sobre: **El círculo**	**Pista 1** No olvides escribir sobre los elementos del círculo.
	Pista 2 Escribe sobre el perímetro de un círculo.
	Pista 3 Recuerda escribir sobre como calcular el área del círculo.

Relevos de evocación

<table>
<tr><th colspan="2">Trabajo en equipo
Como equipo recuerden lo máximo que puedan.
Importante: "Las ideas no se pueden repetir"</th></tr>
<tr><td colspan="2">Suma y resta de fracciones</td></tr>
<tr><td>Escribe lo que Tú sabes...
(2 minutos)</td><td>Escribe lo que Tu compañero/a del lado sabe...
(2 minutos)</td></tr>
<tr><td>Escribe lo que otro compañero/a sabe...
(2 minutos)</td><td>Escribe lo que otro compañero/a sabe...
(2 minutos)</td></tr>
</table>

Importante

Práctica de recuperación

- Todos los estudiantes involucrados.
  - ✓ Pizarras individuales
- Dar tiempo para una retroalimentación y reflexión.
  - ✓ Evita repetir errores en futuras evocaciones de conocimiento.
- Alcanzar un “nivel de dificultad deseable”
  - ✓ Esfuerzo en recordar y desafiantes.

“Para aprender, olvida”

- *Héctor Ruiz Martín*

Práctica espaciada

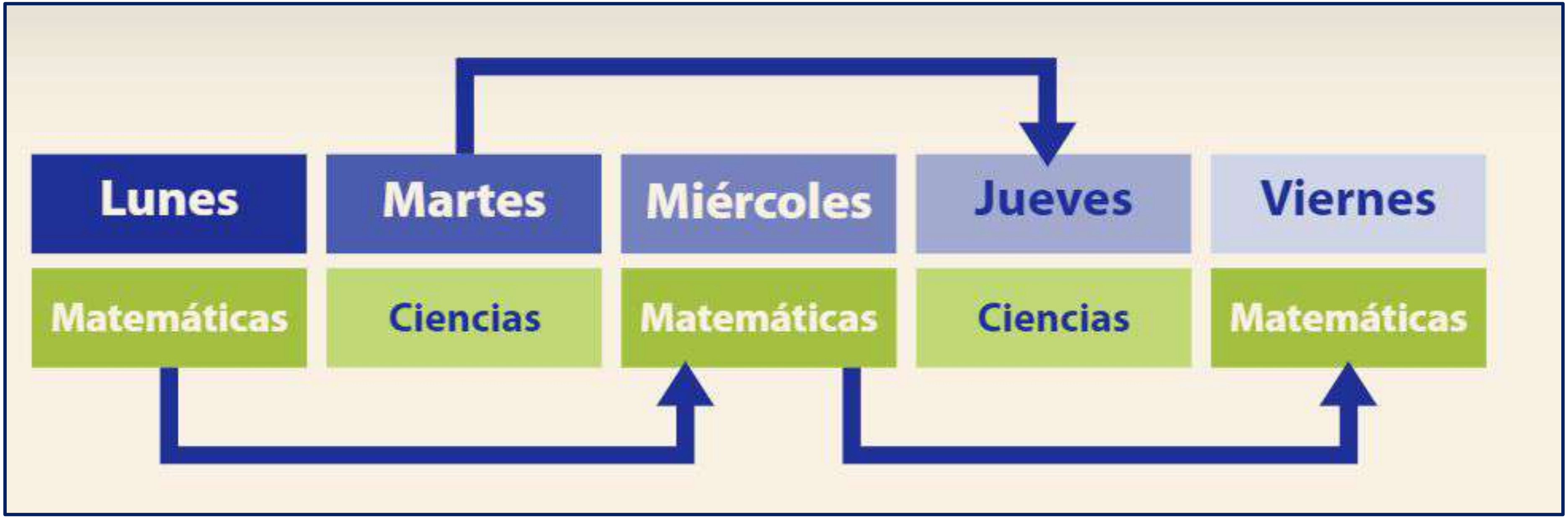
4 horas estudiando de una sola vez

VS

4 horas estudiando en 4 días distintos

	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Examen	
Horas de estudio			●	●		✗
			●	●		
	●	●	●	●		✓

Práctica espaciada



Material complementario

Preguntas para el canasto de conocimiento clase 2

- ¿Un número positivo siempre es mayor que un número negativo?

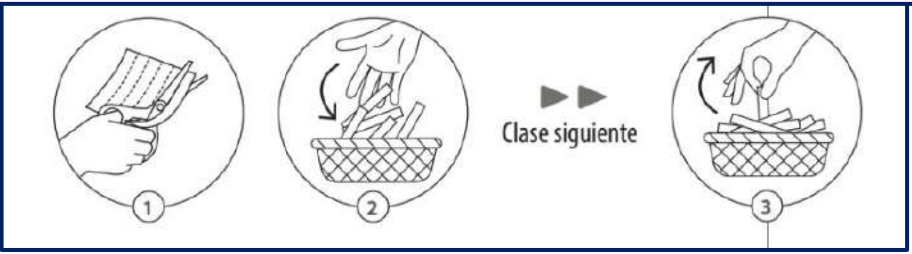
  R: Sí, siempre es mayor, ya que se encuentran a la derecha en la recta numérica. A medida que se avanza hacia la derecha aumenta el valor.

- ¿Puede un número negativo estar a la derecha de un número positivo?

  R: No, no sería correcto, porque un número negativo es menor que un número positivo. Además en la recta numérica siempre están representados a la izquierda. Si los pusiéramos a la derecha de un positivo no estaría bien representado su valor.

- ¿Los números negativos también son infinitos como los positivos?

  R: Sí, también son infinitos, así como avanzamos hacia la derecha aumentando el valor sin fin, podemos hacerlo hacia la izquierda con los negativos.



Práctica intercalada

Simplemente, mezcle los ejercicios

La práctica intercalada, o la simple estrategia de mezclar los conceptos por aprender, puede aumentar (e incluso *duplicar*) el aprendizaje matemático.

Práctica intercalada

Conjunto de problemas agrupados en bloque

Á Á Á V V V P P P

Conjunto de problemas intercalados

Á V P Á V P Á V P


Expectativa
Realidad

Creemos que son capaces de transformar sus expectativas en la realidad.

¿Cómo hacer clases de matemática para un aprendizaje duradero?

Fundamentos desde las ciencias cognitivas para la didáctica de la matemática.

Josefa Álvarez V. - josefa.alvarez@aptus.org
Ricardo Correa T. - ricardo.correa@aptus.org